Задачи линейного программирования транспортного типа образуют широкий круг задач, общим для которых является, как правило, распределение ресурсов, находящихся у m производителей (поставщиков), по n потребителям этих ресурсов.

Классическая транспортная задача имеет следующий вид.

Имеются m пунктов (складов) отправления груза (некоторого однородного ресурса), запасы в каждом из которых составляют соответственно $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Известна потребность в грузах $b_1, b_2, \ldots, b_n$ по каждому из n пунктов назначения (потребителей).

Задана матрица стоимостей доставки по каждому варианту (паре склад-поставщик – потребитель): $C = \{c_{ij}\},\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}$, где c_{ij} – себестоимость перевозки единицы груза от i-го склада-поставщика до j-го потребителя.

Необходимо построить оптимальный план перевозок, т.е. определить, сколько груза должно быть отправлено из каждого i-го склада-поставщика каждому j-му потребителю с учетом минимизации транспортных затрат.

Пусть x_{ij} ($i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}$) – искомый объем транспортируемого груза от i-го склада-поставщика j-му потребителю.

Исходные данные по задаче удобно представлять в виде следующей таблицы, которую называют таблицей поставок или транспортной таблицей.

Таблица 6.1

Таблица поставок

Поставщики \ Потребители	B_1	B_2	…	B_n	Запасы поставщиков
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2n} x_{2n}	a_2
⋮	⋮	⋮	…	⋮	⋮
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mn} x_{mn}	a_m
Потребности потребителей	b_1	b_2	…	b_n	

Задача линейного программирования транспортного типа называется **закрытой**, если суммарные запасы поставщиков равны суммарной потребности потребителей, т.е.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \ . \qquad (6.2)$$

Если такое равенство не соблюдается, то задача является **открытой**.

Для того чтобы потребности всех потребителей были удовлетворены, необходимо выполнение следующей системы условий:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \ (j = \overline{1,n}) . \qquad (6.3)$$

Аналогично, для того чтобы были задействованы все запасы складов-поставщиков, необходимо выполнение следующей системы условий:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \ (i = \overline{1,m}) . \qquad (6.4)$$

По своей сущности искомые переменные не могут быть отрицательными величинами, т.е.

$$x_{ij} \geq 0, \ (\forall\, i = \overline{1,m}, \ \ j = \overline{1,n}) \qquad (6.5)$$

Введем функцию, отражающие суммарные транспортные затраты:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \ .$$

(6.6)

Таким образом, математическая модель данной задачи будет иметь вид:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ (j = \overline{1,n}),$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ (i = \overline{1,m}),$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j, \tag{6.7}$$

$$x_{ij} \ge 0,\ (\forall\, i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}),$$

$$F(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min.$$

Необходимо определить такой план перевозок $X = \{x_{ij}\},\ (i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n})$, удовлетворяющий системам (6.3), (6.4), условию (10.5), при котором суммарные транспортные затраты будут минимальными, т.е. минимизирующий целевую функцию (6.6).

Примечания:

1) Теорема 6.1. Для того чтобы транспортная задача линейного программирования имела решение, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (6.2).

Поэтому если транспортная задача открытого типа, то

а) при $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$ (т.е. если суммарная потребность потребителей превышает суммарные запасы складов-поставщиков) вводится фиктивный склад-поставщик, запас которого составляет:

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i. \tag{6.8}$$

б) при $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$ (т.е. если суммарные запасы складов-поставщиков превышают суммарную потребность потребителей) вводится фиктивный потребитель, потребность которого составляет

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j \,. \qquad (6.9)$$

При этом стоимости перевозок для каждой фиктивной пары склад-поставщик – потребитель принимаются, как правило, равными нулю.

2) Теорема 6.2. Ранг r системы уравнений (6.3), (6.4) при условии (6.2) равен:

$$r = m + n - 1. \qquad (6.10)$$

Следовательно, опорный план (базисное решение) транспортной задачи должен содержать $m+n-1$ отличных от нуля неизвестных. Если в опорном плане число отличных от нуля компонент равно $m+n-1$, то план является невырожденным, а если меньше – то вырожденным.

3) Рассмотренная транспортная задача является по своей сути целочисленной, так как перевозимые грузы в большинстве случаев представляют собой упаковки, ящики, контейнеры и т.д.

Один из важнейших теоретических результатов исследования операций может быть сформулирован следующим образом:

Теорема 6.3. Если для транспортной задачи (6.7) выполняются условия

$$a_i \in N,\ i = \overline{1,m} \text{ и } b_j \in N,\ j = \overline{1,n}, \qquad (6.11)$$

(где N – множество натуральных чисел), то в любом ее допустимом базисном решении базисные переменные принимают значения из множества $N \cup \{0\}$, т.е. являются целыми положительными числами или равны нулю.

Поскольку оптимальное решение транспортной задачи (6.7) является допустимым, то при выполнении условий (6.11) оно удовлетворяет требованию целочисленности. Следовательно, условие целочисленности переменных в транспортной задаче (6.7) можно опустить.

4) В модели (6.7) вместо матрицы стоимостей перевозок (С) может задаваться матрица расстояний. В данном случае в качестве целевой функции рассматривается минимум суммарной транспортной работы.

Наиболее распространенным методом решения задач ЛП транспортного типа является **метод потенциалов**, состоящий из следующих этапов:

1) проверка сбалансированности запасов и потребностей;

2) разработка исходного опорного плана;

3) проверка вырожденности опорного плана;

4) расчет потенциалов;

5) проверка плана на оптимальность;

6) поиск «вершины максимальной неоптимальности» (ВМН);

7) построение контура перераспределения поставок;

8) определение минимального элемента в контуре перераспределения и перераспределение поставок по контуру;

9) получение нового опорного плана.

Этапы 3-9 повторяются, пока не будет найдено оптимальное решение.

Рассмотрим перечисленные этапы.

1. Проверка сбалансированности запасов и потребностей.

В соответствии с теоремой 6.1 проверяется условие сбалансированности запасов поставщиков и потребностей потребителей.

Если транспортная задача открытого типа, то

а) если суммарная потребность потребителей превышает суммарные запасы складов-поставщиков, то вводится фиктивный склад-поставщик, запас которого определяется по формуле (6.8).

б) если суммарные запасы складов-поставщиков превышают суммарную потребность потребителей, то вводится фиктивный потребитель, потребность которого определяется по формуле (6.9).

При этом стоимости перевозок для каждой фиктивной пары склад-поставщик – потребитель принимаются, как правило, равными нулю.

2. Разработка исходного опорного плана.

Для отыскания исходного опорного плана используют ***метод северо-западного угла***, ***метод минимальной стоимости*** и др.

Метод «**северо-западного угла**»

Рассматривается незаполненная левая верхняя («северо-западная») клетка таблицы поставок. Данная ячейка заполняется минимальным значением от возможного объема поставок и объема потребностей. В результате или будут удовлетворены все потребности, или исчерпаны запасы поставщика. Если удовлетворены потребности, то остальные клетки этой колонки вычеркиваются и в последующих распределениях не участвуют.

Если исчерпаны запасы поставщика, то зачеркиваются остальные клетки соответствующей строки, и они не участвуют в последующих распределениях.

Затем рассматривается очередная незаполненная левая верхняя ячейка, и итерации повторяются.

Не смотря на простоту, данный метод не учитывает стоимость перевозок, и поэтому исходный план может оказаться далеким от оптимального. Данный недостаток позволяет устранить метод минимальной стоимости.

Метод «**минимальной стоимости**»

В таблице поставок отыскивается клетка с минимальной стоимостью перевозок:

$$c_{\min} = \min_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}} \{c_{ij}\} \quad . \tag{6.12}$$

При этом из двух клеток с одинаковой стоимостью перевозок предпочтение отдается клетке, через которую осуществляется больший объем перевозок. Данная клетка заполняется минимальным значением от возможного объема поставок и объема потребностей. В результате либо будут удовлетворены потребности, либо исчерпаны запасы.

Если удовлетворены потребности, то остальные клетки этой колонки вычеркиваются и в последующих распределениях не участвуют.

Если исчерпаны запасы поставщика, то зачеркиваются остальные клетки соответствующей строки, и они не участвуют в последующих распределениях.

Затем из всех незаполненных клеток находится очередная клетка с минимальной стоимостью, итерации повторяются.

После того, как будет найден опорный план, по нему вычисляют значение целевой функции (6.6).

3. Проверка вырожденности опорного плана.

В соответствии с теоремой 6.2 проверяется вырожденность найденного плана. Если опорный план вырожденный, т.е.

$$N < m+n-1, \tag{6.13}$$

(где N – число заполненных клеток в таблице поставок) тогда вводится k фиктивных поставок:

$$k = (m+n-1) - N, \tag{6.14}$$

т.е. в любых k незаполненных клетках таблицы поставок вписывают нулевые значения проектным параметрам x_{ij}:

$$x_{ij} = 0, \quad (i, j) \in S,$$

(6.15)

где S – множество пар индексов (i, j) свободных переменных, соответствующих незаполненным клеткам.

4. Расчет потенциалов.

Расчет потенциалов выполняют по **загруженным клеткам** таблицы поставок, для которых:

$$\alpha_i + \beta_j = c_{ij}, \; (i, j) \notin S, \tag{6.16}$$

где α_i, β_j – потенциал i-ой строки и j-ой колонки соответственно.

Для первой строки принимают α_1=0, затем остальные потенциалы рассчитывают по загруженным клеткам в соответствии с выражением (6.14).

Результаты расчетов заносят в таблицу поставок.

Таблица 6.2

Таблица поставок

Поставщики \ Потребители	B_1	B_2	…	B_n	Запасы поставщиков	α_i
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1n} x_{1n}	a_1	α_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2n} x_{2n}	a_2	α_2
⋮	⋮	⋮	…	⋮	⋮	⋮
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mn} x_{mn}	a_m	α_m
Потребности потребителей	b_1	b_2	…	b_n		
β_j	β_1	β_2	…	β_n		

5. Проверка плана на оптимальность.

Проверка опорного плана на оптимальность осуществляется по **незагруженным клеткам**. Если для всех незагруженных клеток выполняется условие:

$$\alpha_i + \beta_j \le c_{ij},\ (i, j) \in S, \tag{6.17}$$

то найденный опорный план является оптимальным.

Оптимальное решение будет единственным, если для всех незагруженных клеток выполняется условие:

$$\alpha_i + \beta_j < c_{ij},\ (i, j) \in S. \tag{6.18}$$

Если для какой-либо незагруженной клетки условие (6.15) не выполняется, то опорный план не является оптимальным и переходят к следующему этапу.

6. Поиск «вершины максимальной неоптимальности» (ВМН).

По незагруженным клеткам, для которых условие (6.15) не выполняется, рассчитывают оценки:

$$\Delta_{ij} = \alpha_i + \beta_j - c_{ij},\ (i, j) \in S_\Omega, \tag{6.19}$$

где S_Ω – множество пар индексов $(i,\ j)$, соответствующих незаполненным клеткам, для которых не выполняется условие оптимальности (6.15). Данные оценки характеризуют размер экономии транспортных издержек на 1 ед. перевозимого груза.

Среди полученных оценок находят наибольшую, т.е.:

$$\Delta_{\max} = \max_{(i,\ j) \in S_\Omega} \{\Delta_{ij}\}, \tag{6.20}$$

которая соответствует ВМН. Клетку, соответствующую ВМН, в таблице поставок помечают «+».

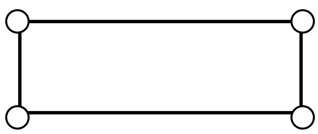
7. Построение контура перераспределения поставок.

Контур перераспределения поставок составляют по следующим правилам:

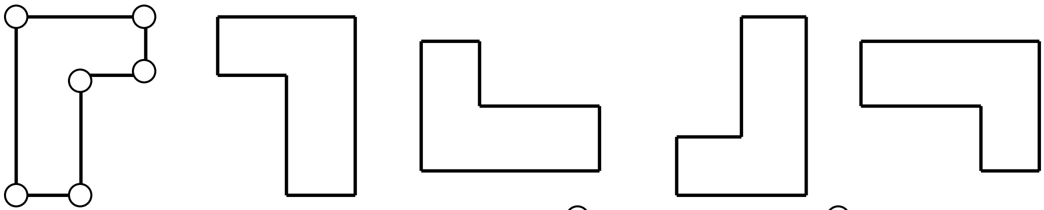
7.1. Контур представляет собой многоугольник с вершинами в загруженных клетках, за исключением клетки ВМН, и звеньями, пролегающими вдоль строк и колонок таблицы поставок. В каждой строке (колонке) должны быть только по две вершины.

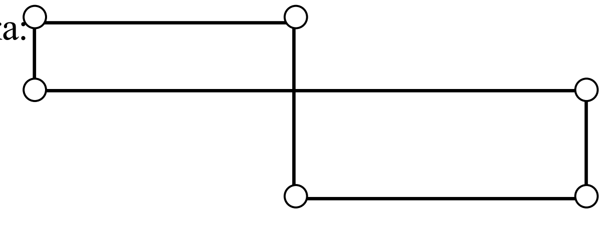
7.2. Вершины контура последовательно поочередно подразделяют на загружаемые «+» и разгружаемые «–», начиная с ВМН.

Построенный контур в соответствии с вышеперечисленными правилами может принимать, к примеру, следующие формы:

а) прямоугольника: 

б) Г-образного многоугольника, например:



в) пересекающегося многоугольника: 

8. Определение минимального элемента в контуре перераспределения и перераспределение поставок по контуру.

В рамках построенного контура анализируют вершины со статусом «разгружаемые» и среди них выбирают с наименьшим объемом поставок, т.е.:

$$x_{\min} = \min_{(i,\,j)\in R}\{x_{ij}\}, \qquad (6.21)$$

(R – множество пар индексов (i, j), соответствующих разгружаемым вершинам контура перераспределения поставок) которую полностью разгружают (перераспределяют поставку по загружаемым клеткам, начиная с ВМН с учетом соблюдения сбалансированности запасов и потребностей по строкам и колонкам). Объемы поставок остальных разгружаемых клеток также распределяют по загружаемым клеткам в соответствии с вышеуказанным принципом сбалансированности.

Перераспределение поставок по контуру осуществляются с целью получения нового «улучшенного» опорного плана.

9. Получение нового опорного плана.

После того, как поставки перераспределены по контуру, получаем новый опорный план и по нему вычисляем значение целевой функции (6.6). Затем переходим к 3 этапу.

***Пример** 6.1.*

На три базы поступили ящики с заготовками деталей, которые необходимо доставить на четыре завода. Исходные данные представлены в нижеследующей транспортной таблице.

Таблица 6.3

Таблица поставок

Заводы-потребители / Базы-поставщики	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы баз-поставщиков
A_1	1	2	3	1	100
A_2	2	3	4	6	200
A_3	3	4	7	12	300
Потребности заводов-потребителей	100	100	300	300	

Определите оптимальный план доставки заготовок на заводы с учетом минимизации совокупных транспортных затрат.

Решение

Обозначим искомые объемы поставок от *i*-ой базы-поставщика к *j*-му заводу-потребителю через $x_{ij}\ (i=\overline{1,3};\ j=\overline{1,4})$.

Математическая модель данной задачи будет иметь вид:

$$F(X)=x_{11}+2x_{12}+3x_{13}+x_{14}+2x_{21}+3x_{22}+4x_{23}+6x_{24}+3x_{31}+4x_{32}+7x_{33}+12x_{34}\to\min$$

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=100,\\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=200,\\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=300,\\ x_{11}+x_{21}+x_{31}=100,\\ x_{12}+x_{22}+x_{32}=100,\\ x_{13}+x_{23}+x_{33}=300,\\ x_{14}+x_{24}+x_{34}=300,\\ x_{ij}\ge 0\ (\forall\, i=\overline{1,3};\ j=\overline{1,4}). \end{cases}$$

<u>I итерация:</u>

<u>1 этап: проверка сбалансированности запасов и потребностей.</u>

Представленная транспортная задача является открытой, т.к. суммарная мощность баз-поставщиков меньше суммарной потребности заводов-потребителей на 200 ящиков:

$$\sum_{i=1}^{3}a_i=100+200+300=600,$$

$$\sum_{j=1}^{4} b_j = 100 + 100 + 300 + 300 = 800,$$

$$\sum_{i=1}^{3} a_i < \sum_{j=1}^{4} b_j \ .$$

Сведем данную транспортную задачу к закрытой: введем фиктивную базу A_4 с недостающей мощностью a_4 = 200 ящиков:

$$a_4 = \sum_{j=1}^{4} b_j - \sum_{i=1}^{3} a_i = 800 - 600 = 200.$$

Зададим значения условных транспортных затрат на единицу груза от данной базы к заводам-потребителям равными нулю, результаты занесем в следующую таблицу.

Таблица 6.4

Таблица поставок

Заводы-потребители / Базы-поставщики	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы баз-поставщиков
A_1	1	2	3	1	100
A_2	2	3	4	6	200
A_3	3	4	7	12	300
A_4	0	0	0	0	200
Потребности заводов-потребителей	100	100	300	300	

С учетом фиктивного поставщика математическая модель будет иметь вид:

$$F(X) = x_{11} + 2x_{12} + 3x_{13} + x_{14} + 2x_{21} + 3x_{22} + 4x_{23} + 6x_{24} + 3x_{31} + 4x_{32} + 7x_{33} + 12x_{34} \to \min$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 100, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 200, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 300, \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 200, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 100, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 100, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 300, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 300, \\ x_{ij} \ge 0 \ (\forall\, i = \overline{1,4};\ j = \overline{1,4}). \end{cases}$$

2 этап: разработка исходного опорного плана.

Для отыскания исходного опорного плана воспользуемся методом **минимальной стоимости**. Согласно таблице поставок (таблица 6.4) минимальная стоимость соответствует клеткам строки фиктивного поставщика. Рассмотрим, к примеру, клетку «4-3». Объем поставок для данной пары поставщик-потребитель составит:

$$x_{43} = \min\{a_4, b_3\} = \min\{200, 300\} = 200.$$

Запишем в клетку «4-3» объем поставок x_{43}=200 (таблица 6.5). Запасы фиктивного поставщика исчерпаны (зачеркиваем остальные клетки данной строки, они в дальнейших рассмотрениях не участвуют).

Таблица 6.5

Таблица поставок

Заводы-потребители / Базы-поставщики	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы баз-поставщиков
A_1	1	2	3	1	100
A_2	2	3	4	6	200
A_3	3	4	7	12	300
A_4	~~0~~	~~0~~	0 **200**	~~0~~	200-200 = 0
Потребности заводов-потребителей	100	100	300-200 =100	300	

Из свободных клеток минимальная стоимость соответствует клеткам «1-1» и «1-4» (c_{ij}=1), выберем, к примеру, клетку «1-4». Вписываем в данную клетку объем поставок x_{14}=100 (таблица 6.6). Запасы первого поставщика исчерпаны (зачеркиваем остальные клетки данной строки, они в дальнейших рассмотрениях не участвуют).

Таблица 6.6

Таблица поставок

Заводы-потребители / Базы-поставщики	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы баз-поставщиков
A_1	~~1~~	~~2~~	~~3~~	1 **100**	100-100=0
A_2	2	3	4	6	200
A_3	3	4	7	12	300
A_4	~~0~~	~~0~~	0 **200**	~~0~~	
Потребности заводов-потребителей	100	100	100	300-100 = 200	

Следующая свободная клетка с наименьшей стоимостью поставок единицы груза – клетка «2-1» (c_{21}=2). Объем поставок для данной пары поставщик-потребитель составит: $x_{21} = \min\{a_2, b_1\} = \min\{200, 100\} = 100.$

Запишем в клетку «2-1» объем поставок x_{21}=100 (таблица 6.7). Потребность первого завода-потребителя полностью удовлетворена (зачеркиваем незадействованную клетку данной колонки – «3-1», она в дальнейших рассмотрениях не участвуют).

Таблица 6.7

Таблица поставок

Заводы-потребители / Базы-поставщики	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы баз-поставщиков
A_1	1	2	3	1 **100**	
A_2	2 **100**	3	4	6	200-100 = 100
A_3	3	4	7	12	300
A_4	0	0	0 **200**	0	
Потребности заводов-потребителей	100-100 = 0	100	100	200	

Оставшиеся запасы второго поставщика целесообразно направить для удовлетворения потребностей второго завода-потребителя, так как стоимость доставки единицы груза здесь наименьшая (c_{22}=3). Вписываем в соответствующую клетку объем поставок x_{22}=100 (таблица 6.8).

Таблица 6.8

Таблица поставок

Заводы-потребители / Базы-поставщики	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы баз-поставщиков
A_1	1	2	3	1 **100**	
A_2	2 **100**	3 **100**	4	6	100-100 = 0
A_3	3	4	7	12	300
A_4	0	0	0 **200**	0	
Потребности заводов-потребителей		100-100 = 0	100	200	

Таким образом, потребность второго завода-потребителя полностью удовлетворена и мощность второго поставщика полностью задействована, поэтому вычеркиваем незадействованные клетки «2-3», «2-4» и «3-2», в дальнейших рассмотрениях они не участвуют.

Продолжая данные рассуждения, в результате получим следующее распределение поставок:

Таблица 6.9

Таблица поставок

Заводы-потребители / Базы-поставщики	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы баз-поставщиков
A_1	1	2	3	1 **100**	100
A_2	2 **100**	3 **100**	4	6	200
A_3	3	4	7 **100**	12 **200**	300
A_4	0	0	0 **200**	0	200
Потребности заводов-потребителей	100	100	300	300	

Совокупные транспортные издержки для данного плана поставок составят (усл. ден. ед.):

$$F(X) = 1\times100 + 2\times100 + 3\times100 + 7\times100 + 12\times200 + 0\times200 = 3700.$$

3 этап: проверка вырожденности опорного плана.

Количество задействованных клеток в таблице поставок (таблица 6.9): N=6. Ранг r системы ограничений транспортной задачи равен:

$$r = m + n - 1 = 4 + 4 - 1 = 7.$$

Так как, $N < m + n - 1$, следовательно, опорный план транспортной задачи вырожденный. Определим количество фиктивных поставок:

$$k = (m + n - 1) - N = 7 - 6 = 1.$$

В любой свободной клетке таблицы поставок проектному параметру x_{ij} присвоим нулевое значение. Выберем, к примеру, клетку «3-2» (клетки для фиктивных поставок необходимо выбирать таким образом, чтобы в дальнейшем можно было корректно построить контур перераспределения поставок).

Таблица 6.10

Таблица поставок

Заводы-потребители / Базы-поставщики	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы баз-поставщиков
A_1	1	2	3	1 **100**	100
A_2	2 **100**	3 **100**	4	6	200
A_3	3	4 **0**	7 **100**	12 **200**	300
A_4	0	0	0 **200**	0	200
Потребности заводов-потребителей	100	100	300	300	

4 этап: расчет потенциалов.

Для первой строки принимаем α_1=0. Рассмотрим загруженную клетку «1-4»:

$$\alpha_1 + \beta_4 = c_{14} \Rightarrow 0 + \beta_4 = 1 \Rightarrow \beta_4 = 1.$$

Для загруженной клетки «3-4»: $\alpha_3 + \beta_4 = c_{34} \Rightarrow \alpha_3 + 1 = 12 \Rightarrow \alpha_3 = 11$.

Аналогично последовательно находим потенциалы строк и колонок по остальным загруженным клеткам, результаты расчетов представлены в таблице 6.11.

Таблица 6.11

Таблица поставок

Потребители / Поставщики	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы поставщиков	α_i
A_1	1	2	3	1 **100**	100	0
A_2	2 **100**	3 **100**	4	6	200	10
A_3	3	4 **0**	7 **100**	12 **200**	300	11
A_4	0	0	0 **200**	0	200	4
Потребности потребителей	100	100	300	300		
β_j	–8	–7	–4	1		

5 этап: проверка плана на оптимальность.

По таблице 6.11 для незагруженных клеток проверим условие оптимальности ($\alpha_i + \beta_j \le c_{ij},\ (i, j) \in S$):

«1-1»: $0-8<1$,

«1-2»: $0-7<2$,

«1-3»: $0-4<3$,

«2-3»: $10-4>4$,

«2-4»: $10+1>6$,

«3-1»: $11-8=3$,

«4-1»: $4-8<0$,

«4-2»: $4-7<0$,

«4-4»: $4+1>0$.

Опорный план не оптимальный, так как имеются клетки, для которых условие оптимальности не выполняется: «2-3», «2-4», «4-4».

6 этап: поиск «вершины максимальной неоптимальности» (ВМН).

Для клеток «2-3», «2-4», «4-4» рассчитаем оценки: $\Delta_{ij} = \alpha_i + \beta_j - c_{ij}$.

$\Delta_{23} = \alpha_2 + \beta_3 - c_{23} = 10-4-4=2$,

$\Delta_{24} = \alpha_2 + \beta_4 - c_{24} = 10+1-6=5$,

$\Delta_{44} = \alpha_4 + \beta_4 - c_{44} = 4+1-0=5$.

$\Delta_{\max} = \max\{\Delta_{23}, \Delta_{24}, \Delta_{44}\} = \max\{2,5,5\} = 5$.

Выбор ВМН неоднозначен (можно выбрать любую), примем клетку «4-4» в качестве ВМН. Пометим ее в таблице поставок знаком $\oplus$ (таблица 6.12).

Таблица 6.12

Таблица поставок

Поставщики \ Потребители	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы поставщиков	α_i
A_1	1	2	3	1 **100**	100	0
A_2	2 **100**	3 **100**	4	6	200	10
A_3	3	4 **0**	7 **100**	12 **200**	300	11
A_4	0	0	0 **200**	0 ⊕	200	4
Потребности потребителей	100	100	300	300		
β_j	–8	–7	–4	1		

7 этап: построение контура перераспределения поставок.

Построим контур перераспределения поставок (таблица 6.13).

Таблица 6.13

Таблица поставок

Поставщики \ Потребители	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы поставщиков	α_i
A_1	1	2	3	1 **100**	100	0
A_2	2 **100**	3 **100**	4	6	200	10
A_3	3	4 **0**	+ 7 **100**	– 12 **200**	300	11
A_4	0	0	– 0 **200**	0 ⊕	200	4
Потребности потребителей	100	100	300	300		
β_j	–8	–7	–4	1		

В таблице 6.13 начиная с ВМН разделим вершины на загружаемые ⊕ и разгружаемые ⊖.

8 этап: определение минимального элемента в контуре перераспределения и перераспределение поставок по контуру.

В рамках построенного контура из клеток со статусом «разгружаемые» выберем клетку с наименьшим объемом поставок (полностью разгружаемую клетку):

$$x_{\min} = \min\{x_{34},\ x_{43}\} = \min\{200,\ 200\} = 200.$$

Выбор неоднозначен, полностью разгружаем, к примеру, клетку x_{34} и загружаем ВМН (x_{44}=200). Для обеспечения соответствия объемов запасов и потребностей перераспределим поставки по контуру – разгрузим клетку «4-3» на 200 ящиков (x_{43}=0) и загрузим на этот же объем клетку «3-3» (x_{33}=100+200=300).

9 этап: получения нового опорного плана.

В результате перераспределения поставок по контуру получим новый опорный план (таблица 6.14).

Таблица 6.14

Таблица поставок

Поставщики \ Потребители	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы поставщиков
A_1	1	2	3	1 **100**	100
A_2	2 **100**	3 **100**	4	6	200
A_3	3	4 **0**	7 **300**	12	300
A_4	0	0	0 **0**	0 **200**	200
Потребности потребителей	100	100	300	300	

Совокупные транспортные издержки для данного плана поставок составят (усл. ден. ед.):

$$F(X) = 1\times100 + 2\times100 + 3\times100 + 7\times300 + 0\times0 + 0\times200 = 2700.$$

II итерация:

1 этап: проверка вырожденности опорного плана.

Опорный план невырожденный.

2 этап: расчет потенциалов.

Результаты расчета потенциалов приведены в таблице 6.15.

Таблица 6.15

Таблица поставок

Потребители / Поставщики	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы поставщиков	α_i
A_1	1	2	3	1 **100**	100	0
A_2	2 **100**	3 **100**	4	6	200	5
A_3	3	4 **0**	7 **300**	12	300	6
A_4	0	0	0 **0**	0 **200**	200	–1
Потребности потребителей	100	100	300	300		
β_j	–3	–2	1	1		

3 этап: проверка плана на оптимальность.

«1-1»: $0-3<1$,

«1-2»: $0-2<2$,

«1-3»: $0+1<3$,

«2-3»: $5+1>4$,

«2-4»: $5+1=6$,

«3-1»: $6-3=3$,

«3-4»: $6+1<12$,

«4-1»: $-1-3<0$,

«4-2»: $-1-2<0$.

Опорный план не оптимальный, так как имеются клетка «2-3», для которой условие оптимальности не выполняется.

<u>4 этап: поиск «вершины максимальной неоптимальности» (ВМН).</u>

Клетку «2-3» примем в качестве ВМН. Пометим ее знаком ⊕ (таблица 6.16).

Таблица 6.16

Таблица поставок

Поставщики \ Потребители	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы поставщиков	α_i
A_1	1	2	3	1 **100**	100	0
A_2	2 **100**	3 **100**	4 ⊕	6	200	5
A_3	3	4 **0**	7 **300**	12	300	6
A_4	0	0	0 **0**	0 **200**	200	–1
Потребности потребителей	100	100	300	300		
β_j	–3	–2	1	1		

<u>5 этап: построение контура перераспределения поставок.</u>

Построим контур перераспределения поставок (таблица 6.17).

Таблица 6.17

Таблица поставок

Поставщики \ Потребители	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы поставщиков	α_i
A_1	1	2	3	1 **100**	100	0
A_2	2 **100**	− 3 **100**	4 ⊕	6	200	5
A_3	3	+ 4 **0**	− 7 **300**	12	300	6
A_4	0	0	0 **0**	0 **200**	200	–1
Потребности потребителей	100	100	300	300		
β_j	–3	–2	1	1		

В таблице 6.17 начиная с ВМН разделим вершины на загружаемые ⊕ и разгружаемые ⊖.

<u>6 этап: определение минимального элемента в контуре перераспределения и перераспределение поставок по контуру.</u>

В рамках построенного контура из клеток со статусом «разгружаемые» выберем клетку с наименьшим объемом поставок (полностью разгружаемую клетку):

$$x_{\min} = \min\{x_{22},\ x_{33}\} = \min\{100,\ 300\} = 100.$$

Полностью разгружаем клетку x_{22} и загружаем ВМН (x_{23}=100). Для обеспечения соответствия объемов запасов и потребностей перераспределим поставки по контуру – разгрузим клетку «3-3» на 100 ящиков (x_{33}=200) и загрузим на этот же объем клетку «3-2» (x_{32}=100).

<u>7 этап: получения нового опорного плана.</u>

В результате перераспределения поставок по контуру получим новый опорный план (таблица 6.18).

Таблица 6.18

Таблица поставок

Потребители / Поставщики	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы поставщиков
A_1	1	2	3	1 **100**	100
A_2	2 **100**	3	4 **100**	6	200
A_3	3	4 **100**	7 **200**	12	300
A_4	0	0	0 **0**	0 **200**	200
Потребности потребителей	100	100	300	300	

Совокупные транспортные издержки для данного плана поставок составят (усл. ден. ед.):

$$F(X) = 1\times100 + 2\times100 + 4\times100 + 4\times100 + 7\times200 = 2500.$$

<u>III итерация:</u>

<u>1 этап: проверка вырожденности опорного плана.</u>

Опорный план невырожденный.

<u>2 этап: расчет потенциалов.</u>

Результаты расчета потенциалов приведены в таблице 6.19.

Таблица 6.19

Таблица поставок

Поставщики \ Потребители	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы поставщиков	α_i
A_1	1	2	3	1 **100**	100	0
A_2	2 **100**	3	4 **100**	6	200	3
A_3	3	4 **100**	7 **200**	12	300	6
A_4	0	0	0 **0**	0 **200**	200	–1
Потребности потребителей	100	100	300	300		
β_j	–1	–2	1	1		

<u>3 этап: проверка плана на оптимальность.</u>

«1-1»: $0-1<1$,

«1-2»: $0-2<2$,

«1-3»: $0+1<3$,

«2-2»: $3-2<3$,

«2-4»: $3+1<6$,

<u>«3-1»</u>: $6-1>3$,

«3-4»: $6+1<12$,

«4-1»: $-1-1<0$,

«4-2»: $-1-2<0$.

Опорный план не оптимальный, так как имеются клетка «3-1», для которой условие оптимальности не выполняется.

<u>4 этап: поиск «вершины максимальной неоптимальности» (ВМН).</u>

Клетку «3-1» примем в качестве ВМН. Пометим ее знаком ⊕ (таблица 6.20).

Таблица 6.20

Таблица поставок

Потребители Поставщики	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы поставщиков	α_i
A_1	1	2	3	1 **100**	100	0
A_2	2 **100**	3	4 **100**	6	200	3
A_3	3 ⊕	4 **100**	7 **200**	12	300	6
A_4	0	0	0 **0**	0 **200**	200	–1
Потребности потребителей	100	100	300	300		
β_j	–1	–2	1	1		

<u>5 этап: построение контура перераспределения поставок.</u>

Построим контур перераспределения поставок (таблица 6.21).

Таблица 6.21

Таблица поставок

Потребители Поставщики	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы поставщиков	α_i
A_1	1	2	3	1 **100**	100	0
A_2	− 2 **100**	3	+ 4 **100**	6	200	3
A_3	3 ⊕	4 **100**	− 7 **200**	12	300	6
A_4	0	0	0 **0**	0 **200**	200	–1
Потребности потребителей	100	100	300	300		
β_j	–1	–2	1	1		

В таблице 6.21 начиная с ВМН разделим вершины на загружаемые + и разгружаемые −.

6 этап: определение минимального элемента в контуре перераспределения и перераспределение поставок по контуру.

В рамках построенного контура из клеток со статусом «разгружаемые» выберем клетку с наименьшим объемом поставок (полностью разгружаемую клетку):

$$x_{\min} = \min\{x_{21},\ x_{33}\} = \min\{100,\ 200\} = 100.$$

Полностью разгружаем клетку x_{21} и загружаем ВМН (x_{31}=100). Для обеспечения соответствия объемов запасов и потребностей перераспределим поставки по контуру – разгрузим клетку «3-3» на 100 ящиков (x_{33}=100) и загрузим на этот же объем клетку «2-3» (x_{23}=200).

7 этап: получения нового опорного плана.

В результате перераспределения поставок по контуру получим новый опорный план (таблица 6.22).

Таблица 6.22

Таблица поставок

Потребители / Поставщики	*B1*	*B2*	*B3*	*B4*	Запасы поставщиков
A1	1	2	3	1 **100**	100
A2	2	3	4 **200**	6	200
A3	3 **100**	4 **100**	7 **100**	12	300
A4	0	0	0 **0**	0 **200**	200
Потребности потребителей	100	100	300	300	

Совокупные транспортные издержки для данного плана поставок составят (усл. ден. ед.):

$$F(X) = 1\times100 + 4\times200 + 3\times100 + 4\times100 + 7\times100 = 2300.$$

VI итерация:

1 этап: проверка вырожденности опорного плана.

Опорный план невырожденный.

2 этап: расчет потенциалов.

Результаты расчета потенциалов приведены в таблице 6.23.

Таблица 6.23

Таблица поставок

Поставщики \ Потребители	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы поставщиков	α_i
A_1	1	2	3	1 **100**	100	0
A_2	2	3	4 **200**	6	200	3
A_3	3 **100**	4 **100**	7 **100**	12	300	6
A_4	0	0	0 **0**	0 **200**	200	–1
Потребности потребителей	100	100	300	300		
β_j	–3	–2	1	1		

3 этап: проверка плана на оптимальность.

«1-1»: $0-3<1$,

«1-2»: $0-2<2$,

«1-3»: $0+1<3$,

«2-1»: $3-3<2$,

«2-2»: $3-2<3$,

«2-4»: $3+1<6$,

«3-4»: $6+1<12$,

«4-1»: $-1-3<0$,

«4-2»: $-1-2<0$.

Найденный опорный план оптимальный, так как для всех незагруженных клеток выполняется условие оптимальности. Оптимальное решение является единственным, так как все неравенства строгие.

Ответ: оптимальное распределение поставок:

$$X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 200 & 0 \\ 100 & 100 & 100 & 0 \end{pmatrix}.$$

Данное распределение поставок обеспечит оптимальные транспортные издержки в размере 2300 усл. ден. ед.